

স্নাতক পাঠ্যক্রম শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা

(BDP Term End Examination)

ডিসেম্বর, ২০১৮ ও জুন, ২০১৯ (December-2018 & June-2019)

ঐচ্ছিক পাঠ্যক্রম (Elective Course)

গণিত (Mathematics)

দশম পত্র (10th Paper)

Analytical Statics : EMT-10

সময় : দুই ঘণ্টা (Time : 2 Hours)

পূর্ণমান : ৫০ (Full Marks : 50)

মানের গুরুত্ব : ৭০% (Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।

অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপাত্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Scientific Calculator ব্যবহার করা কঠোরভাবে নিষিদ্ধ।

Special credit will be given for precise and correct answer. Marks will be deducted for spelling mistakes, untidiness and illegible handwriting.

The figures in the margin indicate full marks.

Use of scientific calculator is strictly prohibited.

1. প্রত্যেক বিভাগ থেকে একটি করে নিয়ে মোট দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

$$10 \times 2 = 20$$

বিভাগ - অ

(a) একটি সমতলীয় বলগোষ্ঠী $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ যথাক্রমে

একটি দৃঢ় বস্তুর $P_1(r_1), P_2(r_2), \dots, (P_n)(r_n)$ বিন্দুতে

ক্রিয়া করে, যেখানে $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ ঐ তলের O বিন্দুর

সাপেক্ষে P_1, P_2, \dots, P_n বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর।

দেখান যে, বলগোষ্ঠীটি O বিন্দুতে একটি বল \vec{F}

এবং একটি ভ্রামক $\vec{G} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k$ -এর সঙ্গে

সমতুল। এর থেকে দেখান যে,

(i) যদি $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \neq \vec{0}$, তাহলে বলগোষ্ঠীটি একটি

বলের সমতুল; এবং

(ii) যদি $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{0}$, তাহলে বলগোষ্ঠীটি একটি

ভ্রামকের সমতুল যদি $\vec{G} \neq \vec{0}$ হয়। 10

- (b) a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকের কেন্দ্র থেকে b ও c দূরত্বে এবং একই ধারে অবস্থিত দুটি সমান্তরাল সমতল ঐ গোলকের একটি অংশ ছিন্ন করে। ঐ খণ্ডিত অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করুন। এর থেকে a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি অর্ধগোলকের কেন্দ্র থেকে সেটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় করুন। 10

বিভাগ - আ

- (c) একটি সামতলিক ক্ষেত্র সমসত্ত্ব তরলের মধ্যে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত আছে এবং z ও ζ যথাক্রমে তার ভারকেন্দ্র ও চাপকেন্দ্রের গভীরতা। যদি ঐ

সমতলের গভীরতা আরও y বাড়ানো হয়, তাহলে দেখান যে, নতুন মুক্তক্ষেত্র থেকে নতুন চাপকেন্দ্রের গভীরতা $\frac{y^2 + 2yz + z\zeta}{z + y}$ এবং ঐ চাপকেন্দ্র

$$y \frac{\zeta - z}{z + y} \text{ পরিমাণ উত্তোলিত হয়।} \quad 10$$

- (d) a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট সমপ্রস্থচ্ছেদযুক্ত অর্ধবৃত্তাকার বদ্ধ টিউব সমান আয়তনের ρ এবং σ ঘনত্বযুক্ত দুটি অমিশ্রিত তরল দ্বারা পরিপূর্ণ আছে। রৈখিক প্রতিসাম্যের (line of symmetry) সাথে α কোণে নত এরূপ উল্লম্ব ব্যাসার্ধের চারিদিকে টিউবটি ω কৌণিক বেগে ঘোরে। σ ঘনত্বযুক্ত তরলটি নীচে এবং টিউবের উত্তল দিকটি নীচের দিকে আনত থাকলে, প্রমাণ করুন, দুই প্রান্তে চাপ সমান হবে যদি
- $$\frac{\omega^2 a}{2g} (\sigma - \rho) = \frac{\sigma}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\rho}{\cos \alpha - \sin \alpha} \text{ হয়।} \quad 10$$

2. প্রত্যেক বিভাগ থেকে অন্তত একটি প্রশ্ন নির্বাচন করে যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দিন : $6 \times 3 = 18$

বিভাগ - অ

- (a) স্থির বিন্দু A থেকে একটি দড়ির সাহায্যে W_1 ওজন ঝোলানো হল। আবার W_1 থেকে আর একটি দড়ির সাহায্যে W_2 ওজন ঝোলানো হল। কল্পিত কার্যের নীতি ব্যবহার করে দড়ি দুটির টান নির্ণয় করুন। 6

- (b) একটি অসম সূত্র অভিকর্ষ অধীনে ঝুলছে এবং সূত্রটির যে কোন বিন্দুতে প্রস্থচ্ছেদ টানের ব্যস্তানুপাতী। প্রমাণ করুন যে সূত্রটি একটি উল্লম্ব অক্ষ বিশিষ্ট অধিবৃত্তের আকারে ঝুলছে। 6
- (c) X, Y, Z বলগুলি যথাক্রমে তিনটি সরলরেখা $y = b, z = -c; z = c, x = -a; x = a, y = -b$ বরাবর ক্রিয়া করে। দেখান যে, যদি $\frac{a}{X} + \frac{b}{Y} + \frac{c}{Z} = 0$ হয়, তবে তাদের একটি লক্ষি থাকবে। 6

বিভাগ - আ

- (d) ρ ঘনত্বের ত্রিভুজাকৃতি পাত ABC , σ ঘনত্বের তরলে উল্লম্বভাবে ভাসছে, যাতে B বিন্দুটি তরলের উপরিতলে থাকে এবং A বিন্দুটি তরলে নিমজ্জিত হয় না। দেখান যে, $\rho : \sigma = \sin A \cos C : \sin B$. 6
- (e) একটি ঘন অর্ধগোলক যার ভূমির উর্ধ্বতম বিন্দুটি উপরিতলে থাকা অবস্থায় তরলে নিমজ্জিত এবং ভূমিটি তরলের উপরিতলের সাথে $\tan^{-1} 2$ কোণে আনত। অর্ধগোলকটির বক্রতলের উপর লক্ষিঘাত নির্ণয় করুন। 6
- (f) a ব্যাসার্ধ এবং h উচ্চতা বিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙ, অক্ষকে উল্লম্ব রেখে একটি তরলে ভাসমান যার ঘনত্ব চোঙের ঘনত্বের $\frac{4}{3}$ গুণ। ঐ চোঙের পরাকেন্দ্র-এর অবস্থান নির্ণয় করুন। 6

3. প্রত্যেক বিভাগ থেকে দুটি করে নিয়ে মোট চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন : $3 \times 4 = 12$

বিভাগ - অ

- (a) তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ যথাক্রমে, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C তে ক্রিয়া করে। যদি ওদের লব্ধি বলের ক্রিয়ারেখা সর্বদা ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র দিয়ে যায়, তবে দেখান যে,

$$\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}.$$
 3
- (b) একটি ঘন অর্ধগোলক একটি সমব্যাসার্ধযুক্ত স্থির গোলকের উপর সাম্যাবস্থায় আছে। যদি অর্ধগোলকের বক্রতল গোলকের উপরে থাকে, তবে দেখান যে সাম্যাবস্থা সুস্থিতিহীন। 3
- (c) W ওজন বিশিষ্ট ভারী বস্তুকে একটি অমসৃণ অনুভূমিক তলে চালিত করার জন্য নিম্নতম বল নির্ণয় করুন। 3
- (d) ব্যাখ্যা করুন : ‘পোঁয়স-এর কেন্দ্রীয় অক্ষ’ এবং ‘রেন্‌চ’। 3

বিভাগ - আ

- (e) দেখান যে, মিশ্রিত হয় না এবং মাধ্যাকর্ষণ বলের প্রভাবে স্থিত এরূপ দুটি ভারী সমসত্ত্ব তরলের সাধারণ তল, অনুভূমিক সমতল হবে। 3

- (f) জলে নিমজ্জিত $ABCD$ একটি বর্গাকার সামতলিক পাতের AB বাহুটি জলতলে আছে। একটি রেখা AX এমনভাবে টানা হল যাতে X , DC বাহুর উপর থাকে এবং পাতটি এমন দুটি ভাগে বিভক্ত হয় যাদের প্রত্যেকের উপর ঘাত সমান। $DX : DC$ নির্ণয় করুন। 3
- (g) অভিকর্ষ ত্বরণ g ধ্রুবক হলে, z উচ্চতায় সমোষ্ণ বায়ুমণ্ডলের চাপ বের করুন। 3
- (h) একটি আয়তক্ষেত্রের দুটি বাহু অনুভূমিক এবং তরলের উপরিতল হতে a এবং b গভীরতায় আছে। দেখান যে, ঐ ক্ষেত্রটির চাপকেন্দ্রের গভীরতা

$$\frac{2}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$
 3

(English Version)

1. Answer any *two* questions taking *one* from each Group : $10 \times 2 = 20$

Group – A

- (a) A system of coplanar forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ are acting on a rigid body at points $P_1(\vec{r}_1), P_2(\vec{r}_2), \dots, P_n(\vec{r}_n)$ respectively, where $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ are the position vectors of P_1, P_2, \dots, P_n with respect to a point O in the plane of the forces. Show that the system can be reduced to a single force \vec{F} at O together with a couple $\vec{G} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k$.

Hence show that

- (i) if $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \neq \vec{0}$, then the system reduces to a single force only; and
- (ii) if $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{0}$, the system reduces to a couple if $\vec{G} \neq \vec{0}$. 10

- (b) Find the centre of gravity of the solid segment of a sphere of radius a bounded by two parallel planes in the same side at distance b and c respectively from the centre.

Hence find the distance of the centre of gravity of a solid hemisphere of radius a from the centre. 10

Group – B

- (c) A plane area is fully immersed in a homogeneous liquid and the depth of its centre of gravity and pressure are respectively z and ζ . If the whole area be now further dipped through y in its own plane, then show that the depth of the new centre of pressure is $\frac{y^2 + 2yz + z\zeta}{z + y}$ from the new free surface and it is raised through the distance $y \frac{\zeta - z}{z + y}$. 10
- (d) A uniform semi-circular closed tube of radius a is tightly filled with equal volumes of two fluids of densities ρ and σ respectively which do not mix, and is

QP Code : 19UT10EMT10

rotated with angular velocity ω about a vertical radius making an angle α with the line of symmetry. Prove that the pressures at the two ends will be equal, if

$$\frac{\omega^2 a}{2g}(\sigma - \rho) = \frac{\sigma}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\rho}{\cos \alpha - \sin \alpha},$$

the fluid of density σ being the lower of the two, and the convexity of the tube being downwards. 10

2. Answer any *three* questions taking at least *one* from each Group : $6 \times 3 = 18$

Group – A

- (a) From a fixed point A , a weight W_1 is suspended by a string; and another weight W_2 is suspended from W_1 by other string. Using the principle of virtual work find the tensions of the two strings. 6
- (b) In a non-uniform string hanging under gravity the area of the cross-section at any point is inversely proportional to the tension. Show that the curve is an arc of a parabola with its axis vertical. 6

QP Code : 19UT10EMT10 2

- (c) Forces X, Y, Z act along the three straight lines $y = b, z = -c; z = c, x = -a; x = a, y = -b$ respectively. Show that they will have a single resultant if $\frac{a}{X} + \frac{b}{Y} + \frac{c}{Z} = 0$. 6

Group – B

- (d) A triangular lamina ABC of density ρ floats in a liquid of density σ , with the plane vertical, the point B being in the surface of the liquid and the point A not immersed. Show that $\rho : \sigma = \sin A \cos C : \sin B$. 6
- (e) A solid hemisphere is immersed in a liquid so that the highest point of its base is on the surface and the base makes an angle $\tan^{-1} 2$ with the surface of the liquid. Find the resultant thrust on the curved portion of the hemisphere. 6
- (f) Find the position of the metacentre in a right circular cylinder of radius a and height h , floating with its axis vertical in a liquid whose density is $\frac{4}{3}$ times that of the cylinder. 6

3. Answer any *four* questions taking *two* from each Group : $3 \times 4 = 12$

Group – A

- (a) Three like parallel forces $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ act at three vertices A, B, C respectively of a triangle ABC . If their resultant always passes through the incentre of the triangle ABC , then show that $\frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C}$.

3

- (b) A solid hemisphere rests in equilibrium on a fixed sphere of equal radius. If the hemisphere rests on its curved surface, show that the equilibrium is unstable. 3

- (c) Find the least force required to move a weight W along a rough horizontal plane. 3

- (d) Explain 'Poinsot's Centre Axis' and 'Wrench'. 3

Group – B

- (e) Show that the common surface of two heavy homogeneous liquids which do not mix and rest under gravity is a horizontal plane. 3

- (f) A square lamina $ABCD$ is immersed in water with the side AB in the surface. A straight line AX is drawn so that X lies on DC and it divides the lamina into two parts, the thrusts on which are equal. Find $DX : DC$. 3
- (g) Find the pressure in an isothermal atmosphere at a height z when acceleration due to gravity g is constant. 3
- (h) Show that the depth below the surface of a liquid of the centre of pressure of a rectangle, two of whose sides are horizontal and at a depth a and b is $\frac{2}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$. 3

=====