No. of Printed Pages : 8

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

December, 2018

00432

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

---

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(a) Define Hermitian matrix. Show that the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ is Hermitian.

(b) Define symmetric and antisymmetric tensors.

(c) Show that each element in an abelian group is a class by itself.

(d) Show that the function $w = z^3$ is analytic.

(e) Locate and name the singularity of the function $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z}$.

(f) Obtain the Laplace transform of cos pt.

(g) Using the Rodrigues' formula for Legendre polynomials $P_n(x) = \frac{1}{2^n \, n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$, evaluate $P_2(x)$.

(h) Plot Bessel functions of the first kind and orders 0 and 1.

2. Attempt any *two* parts : *2×5=10*

(a) Determine the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix P :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix M :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Show that set $\{1, \omega, \omega^2\}$ forms a cyclic group of order 3 under multiplication, where ω is the imaginary cube root of unity.

3. Attempt any *two* parts : $2\times5=10$

(a) Using the method of residues, show that

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta} = \frac{2\pi}{3}$$

(b) Obtain the Taylor series expansion of sin z about $z = \frac{\pi}{2}$.

(c) Evaluate the integral

$$\oint \frac{3z}{(z^2 + 9)}$$

over the circle $|z| = 4$.

4. Attempt any *two* parts : $2\times5=10$

(a) Calculate the Laplace transform of t^2e^t.

(b) Calculate the Fourier sine transform of the function

$$f(x) = e^{-ax} \qquad a > 0, 0 < x < \infty$$

(c) Solve the initial value problem using the method of Laplace transforms :

$$y'' - 2y' - 3y = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 7$$

5. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Using the generating relation for Legendre polynomials

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

obtain the recurrence relation

$(2n + 1) \, x \, P_n(x) = (n + 1) \, P_{n+1}(x) + n \, P_{n-1}(x)$

(b) Use Rodrigues' formula for Laguerre polynomials to generate $L_4(x)$.

(c) The expression for Bessel function of the first kind and of order n is given by

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \, \Gamma(n + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Show that

$$x^{-n} \left[\frac{d}{dx} \{x^n J_n(x)\} \right] = J_{n-1}(x).$$

पी.एच.ई.-14

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2018

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *सभी प्रश्न कीजिए । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

1. कोई ***पाँच*** भाग हल कीजिए : *5×2=10*

(क) हर्मिटी आव्यूह की परिभाषा दीजिए । सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह हर्मिटी है : $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

(ख) सममित और प्रति-सममित टेन्सर की परिभाषा दीजिए ।

(ग) सिद्ध कीजिए कि आबेली समूह का प्रत्येक अवयव स्वयं में एक वर्ग है ।

(घ) सिद्ध कीजिए कि फलन $w = z^3$ विश्लेषिक है ।

(ङ) फलन $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z}$ की विचित्रता निर्धारित कीजिए और उसका नाम बताइए ।

(च) फलन cos pt का लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए ।

(छ) लेजान्ड्रे बहुपदों के लिए रोड्रिगेज़-सूत्र

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\ n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$ का उपयोग कर

$P_2(x)$ का मूल्यांकन कीजिए ।

(ज) शून्य और 1 कोटियों वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलनों के आलेख खींचिए ।

2. कोई *दो* भाग हल कीजिए : *2×5=10*

(क) निम्नलिखित आव्यूह P के आइगेनमान और आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(ख) आव्यूह M के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ग) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, \omega, \omega^2\}$ गुणन के अधीन कोटि 3 का एक चक्रीय समूह है, जहाँ ω इकाई का अधिकल्पित घनमूल है ।

3. कोई *दो* भाग हल कीजिए : *2×5=10*

(क) अवशिष्ट विधि का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta} = \frac{2\pi}{3}$$

(ख) $z = \frac{\pi}{2}$ के प्रति sin z का टेलर श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए ।

(ग) वृत्त $|z| = 4$ पर समाकल

$$\oint \frac{3z}{(z^2 + 9)}$$

का मान ज्ञात कीजिए ।

4. कोई *दो* भाग हल कीजिए : *2×5=10*

(क) t^2e^t का लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए ।

(ख) फलन

$$f(x) = e^{-ax} \qquad a > 0, 0 < x < \infty$$

का फूरिये साइन रूपांतर परिकलित कीजिए ।

(ग) लाप्लास रूपांतर विधि का प्रयोग कर निम्नलिखित आदि मान समस्या हल कीजिए :

$$y'' - 2y' - 3y = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 7$$

5. कोई *दो* भाग हल कीजिए : *2×5=10*

(क) लेजान्ड्रे बहुपदों के लिए जनक संबंध

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

का प्रयोग कर निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध प्राप्त कीजिए :

$$(2n + 1)\, x\, P_n(x) = (n + 1)\, P_{n+1}(x) + n\, P_{n-1}(x)$$

(ख) लागेर बहुपदों के लिए रोड्रिगेज़ सूत्र का उपयोग कर $L_4(x)$ जनित कीजिए ।

(ग) प्रथम प्रकार और n कोटि के बेसल फलन का व्यंजक निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\, \Gamma(n + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$x^{-n}\left[\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\}\right] = J_{n-1}(x).$$